目次

第 1 章

積分の計算

$\boxed{1}$ 記号・用語と基本の公式のまとめ

記号・用語

関数 $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とかく．また，y が x 関数であるとき，その導関数を $\dfrac{dy}{dx}$ とかく．$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を $\dfrac{d}{dx}f(x)$ とかくときもある．

関数 $f(x)$ に対して，微分すると $f(x)$ になる関数を $f(x)$ の**不定積分または原子関数**という．すなわち，$F'(x) = f(x)$ を満たす関数 $F(x)$ を，$f(x)$ の不定積分といい，$F(x) = \displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C(C:$ 積分定数$)$ と表す．また，$f(x)$ の不定積分を求めることを $f(x)$ を**積分する**という．数学 II で学んだ次の性質はつかえる．

不定積分の性質

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \quad (k\text{: 定数}), \qquad \int \{f(x)+g(x)\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

注意！

$\displaystyle\int f(x)g(x)dx = \int f(x)dx \int g(x)dx$ のように積を分けることはできない．

◆◆補足◆◆ 積分計算の３つの心得

積分計算をするのに重要な３つの心得があり，これらを意識して計算していくと良い.

1. 積分は, 微分の逆の計算であるから, **積分した式があっているか不安なときは微分してチェックする！**微分の逆の計算なので, 以下の公式 (＊) が得られる.
2. **積分は積に弱く和に強い.** 式変形は和の形に直すのが基本

   例 $\int (x^2+1)xdx = \int (x^3+x)dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2} + x^2 + C$
3. 和に直すことが優先. それでも計算できないときに**最後の手段として置換積分**をする.

基本の公式のまとめ

右式の合成関数バージョンが左式

■ $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \ (n \neq -1)$　　□ $\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1} \cdot \frac{1}{a} + C$

■ $\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$　　□ $\int \frac{1}{(ax+b)} dx = \frac{1}{a}\log|ax+b| + C$

■ $\int e^x dx = e^x + C$　　□ $\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$

■ $\int \sin x dx = -\cos x + C$　　□ $\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$

■ $\int \cos x dx = \sin x + C$　　□ $\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$

■ $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$　　□ 使用頻度が少ないため覚える必要なし

■ $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\tan x} + C$　　□ 使用頻度が少ないため覚える必要なし

■ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$　　□ $\int a^{lx+m} dx = \frac{a^{lx+m}}{\log a} \cdot \frac{1}{l} + C$

■ $\int \log x dx = x\log x - x + C$　　□ $\int \log(ax+b) dx = \frac{1}{a}(ax+b)\log(ax+b) - x + C$

例題 1: 基本の計算

次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x^{-4}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3}dx$

(3) $\displaystyle\int \sqrt{x^3}dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{3\sqrt{x}}dx$

(5) $\displaystyle\int 3x^{-3}dx$

(6) $\displaystyle\int \sqrt[4]{x^3}dx$

(7) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x}dx$

(8) $\displaystyle\int \sqrt{x}(x-1)dx$

(9) $\displaystyle\int (4x^{\frac{1}{3}}+3x^{\frac{1}{2}}-1)dx$

(10) $\displaystyle\int \frac{2x^3+x^2}{x}dx$

(11) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x}dx$

(12) $\displaystyle\int \frac{3x^2+5x}{x^2}dx$

(13) $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{x}}dx$

(14) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

(15) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{\sqrt{x}}dx$

例題 2: 基本の計算 (展開するタイプ)

次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x}dx$

(2) $\displaystyle\int \sqrt{x}(x-1)^2dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{(x-2)^2}{x^4}dx$

(4) $\displaystyle\int \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{x^2}dx$

(6) $\displaystyle\int \left(x+\frac{1}{x}\right)^3 dx$

2 合成関数の積分

$\displaystyle\int f(ax+b)dx$ の積分（合成関数の積分）

関数 $f(x)$ に対して，$f(x)$ の原子関数の 1 つを $F(x)$ とする．このとき，定数 a, b に対して合成関数の微分法より

$$\{F(ax+b)\}' = f(ax+b) + C,\ (a \neq 0)$$

よって

$$\{\frac{1}{a}F(ax+b)\}' = f(ax+b)$$

したがって，次の公式が得られる．

合成関数の公式

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \quad \text{ただし}\ ((a \neq 0))$$

■ の式に対して，上の公式を用いると □ の式を得る．

■ $\displaystyle\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C\ (n \neq -1)$　　□ $\displaystyle\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{n+1}(ax+b)^{n+1} \cdot \frac{1}{a} + C$

■ $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \log|x| + C$　　□ $\displaystyle\int \frac{1}{(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\log|ax+b| + C$

例題 3: 合成関数の積分

の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int (2x+3)^3 dx$

(2) $\displaystyle\int (2x-3)^5 dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{(3x+2)^2} dx$

(4) $\displaystyle\int \sqrt{2x+1} dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{2x-1} dx$

(6) $\displaystyle\int \frac{1}{x+6} dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{1-x} dx$

(8) $\displaystyle\int \frac{3}{1-2x} dx$

(9) $\displaystyle\int (3x-1)^2 dx$

(10) $\displaystyle\int \frac{1}{(3x-2)^5} dx$

(11) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$

(12) $\displaystyle\int \sqrt{1-5x} dx$

(13) $\displaystyle\int \{(x-1)^{\frac{3}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{2}}\} dx$

(14) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}\right) dx$

変形して $\int f(ax+b)dx$ の形に持ち込む積分.

$\cdots$ $\int$ (多項式) $(ax+b)^n dx$ の形に式変形する. これらは置換積分でもできるが計算はこの方法が楽である.

例

$$\begin{aligned}\int x^2(1-x)^4dx &= \int\{1-(1-x)\}^2(1-x)^4dx\\ &= \int\{1-2(1-x)+(1-x)^2\}(1-x)^4dx\\ &= \int\{(1-x)^4-2(1-x)^5+(1-x)^6\}dx\\ &= -\frac{1}{5}(1-x)^5+\frac{1}{3}(1-x)^6-\frac{1}{7}(1-x)^7+C\end{aligned}$$

同様に以下のような式変形をして積分計算する.

$$\int 3x\sqrt{x-1}dx = 3\int\{(x-1)+1\}(x-1)^{\frac{1}{2}}dx$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \int\{(x+1)-1\}(x+1)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$\int x(3x+2)^5dx = \int\{\frac{1}{3}(3x+2)-\frac{2}{3}\}(3x+2)^5dx$$

例題 4: 式変形をしてから合成関数の積分

次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int x\sqrt{3x+4}dx$

(2) $\displaystyle\int x^2(1-x)^n dx$

(3) $\displaystyle\int x\sqrt{x+2}dx$

(4) $\displaystyle\int x\sqrt{4-x}dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2x-1}}dx$

(6) $\displaystyle\int 3x\sqrt[3]{1-3x}dx$

(7) $\displaystyle\int x^2\sqrt{2x+1}dx$

(8) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}dx$

(9) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x}}dx$

3 分数式の積分

$\displaystyle\int$（分数式）dx の積分は次の $\begin{cases} \text{(1)} & \text{分子の次数下げ} \\ \text{(2)} & \text{部分分数分解} \end{cases}$ のどちらかで式変形をする.

(1) 分数の次数下げ

$\displaystyle\int \frac{Q(x)}{P(x)}dx$ において, ($Q(x)$ の次数) $\geqq$ ($P(x)$ の次数) のときは割り算をして分子の次数を下げてから積分をする.

例

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2-1}{x+1}dx &= \int \frac{2(x^2-1)+1}{x+1} \\ &= \int \{2(x-1)+\frac{1}{x+1}\}dx \\ &= x^2-2x+\log|x+1|+C\end{aligned}$$

(2) 部分分数分解

$\displaystyle\int \frac{Q(x)}{P(x)}dx$ において, ($Q(x)$ の次数) $<$ ($P(x)$ の次数) のときは部分分数分解して積を和の形にしてから積分をする.

例

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2-1}dx &= \int \frac{1}{(x+1)(x-1)} \\ &= \int \frac{1}{2}(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1})dx \\ &= \frac{1}{2}(\log|x-1|-\log|x+1|)+C \\ &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C\end{aligned}$$

◆◆補足◆◆ 【部分分数分解の分け方】（忘れても式を自分で作ること）

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{px+b}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{A}{ax+b}+\frac{B}{cx+d}$$

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{px+b}{(ax+b)(cx+d)^2} = \frac{A}{ax+b}+\frac{B}{cx+d}+\frac{C}{(cx+d)^2}$$

特に, $\displaystyle\frac{1}{(x+a)(x+b)^2} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}\right)$（ただし $a \neq b$）は記憶しておくこと.

例題 5: 分数式

次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x-2}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2x-3}dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{x+2}{(x-1)(2x+1)}dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{3x^2+4x-2}{3x+1}dx$

(5) $\displaystyle\int 3x^{-3}dx$

(6) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x(x+2)(x+3)}dx$

■ここまでの積分練習 数学 II で学習した性質はそのまま使える．

定積分の公式

$f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$ として

$$\int_b^a f(x)dx = [F(x)]_b^a = F(b) - F(a)$$

定積分の性質

定数を前に出して分けられる

$$\int_b^a \{kf(x) + lg(x)\}dx = k\int_b^a f(x)dx + l\int_b^a g(x)dx$$

積分区間を入れ替えてマイナスをつける

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

積分区間の上端と下端が同じ値で関数が等しければ，積分区間をくっつけられる

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

実践問題 1: ここまでの定積分 1

次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}dx$

(2) $\displaystyle\int_1^4 x^{-\frac{3}{2}}dx$

(3) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x}dx$

(4) $\displaystyle\int_0^1 (1-\sqrt{x})^2dx$

(5) $\displaystyle\int_1^2 \frac{(1-x^2)^2}{x^2}dx$

(6) $\displaystyle\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$

(7) $\displaystyle\int_0^2 (3x-1)^4dx$

(8) $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{2-x}dx$

(9) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$

(10) $\displaystyle\int_2^{e+1} \frac{dy}{1-y}$

(11) $\displaystyle\int_3^4 \frac{dx}{(x-1)(x-2)}$

(12) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x+3)^2}{x+1}dx$

(13) $\displaystyle\int_0^1 x(x-1)^4dx$

(14) $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{x-1}dx$

(15) $\displaystyle\int_3^4 \frac{dx}{(x+1)^2(x-2)}$

4 べき関数の積分

■ $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$

□ $\displaystyle\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$

■ $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$

□ $\displaystyle\int a^{lx+m} dx = \frac{a^{lx+m}}{\log a} \cdot \frac{1}{l} + C$

例題 6: べき関数の積分

次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int (3x + 2e^x)dx$

(2) $\displaystyle\int (x^{-2} + e^x)dx$

(3) $\displaystyle\int e^{x-1}dx$

(4) $\displaystyle\int e^{2x-3}dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}-1}{e^x-1}dx$

(6) $\displaystyle\int \frac{e^{3x}-1}{e^{2x}+e^x+1}dx$

$\boxed{5}$ 三角関数の積分

■ $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C$

■ $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C$

■ $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\tan x} + C$

■ $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$

例題 7: 三角関数の積分 (基本)

次の不定積分または定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \sin(2x-3)dx$

(2) $\displaystyle\int \cos\frac{\pi}{2}tdt$

(3) $\displaystyle\int \left(\sin x - \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 +1}{\cos^2 x}dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{\cos^3 -1}{\cos^2 x}dx$

(6) $\displaystyle\int \left(2+\frac{1}{\tan x}\right)\sin x dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{x-\cos^2 x}{x\cos^2 x}dx$

(8) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos x - 2\sin x)dx$

(9) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2-\sin x)dx$

例題 8: 三角関数の積分 (倍角の公式でまとめる)

次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \sin x \cos x dx$ (2) $\displaystyle\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx$

注意！

$\displaystyle\int \sin^3 x \cos x dx$ は $\displaystyle\int f^{(n)}(x)f'(x)dx$, $\displaystyle\int \sin 5x \cos 3x dx$ は和積の利用で積分します.

似ている式でも積分する方法が異なるため，整理しておきましょう.

例題 9: 三角関数の積分（半角の公式で分ける）

次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$

(2) $\displaystyle\int \sin^2 2x dx$

(3) $\displaystyle\int \cos^4 x dx$

(4) $\displaystyle\int \left(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right) dx$

例題 10: 三角関数の積分 ($\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ の利用)

次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}dx$　　(2) $\displaystyle\int \tan^2 x dx$

例題 11: 三角関数の積分 (和積の公式で積から和に変形)

次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \sin 3x \cos 2x dx$　(2) $\displaystyle\int \cos 3x \sin x dx$　(3) $\displaystyle\int \cos^2 x \sin 3x dx$

$\boxed{6}$ $\int f^{(n)}(x)f'(x)dx$ の積分

$\int f^{(n)}(x)f'(x)dx = \frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(x) + C$ の積分

... この積分は置換積分でもできるが計算はこの方法が楽である.

例

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x^2+1}dx &= \frac{1}{2}\int (x^2+1)'(x^2+1)^{\frac{1}{2}}dx \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + C\end{aligned}$$

インテグラルと dx の間の 2 つの関数のうちの 1 つを，もう一方の関数（もしくはその関数の一部）を使ってできる微分した形で表す．その際に余分な値がでてきたときは，何かをかけて打ち消させる.

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x dx &= \int \sin x(1-\cos^2 x)dx \\ &= -\int (\cos x)'(1-\cos^2 x)dx \\ &= -(\cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x) + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{\log x}{x}dx &= \int \log x\cdot(\log x)'dx \\ &= \frac{1}{2}(\log x)^2 + C\end{aligned}$$

注意！

$\int \frac{\log x}{x}dx$ の積分は分数になっているため $\int f^{(n)}(x)f'(x)dx$ の積分だと気がつきにくい.

例題 12: $\int f^{(n)}(x)f'(x)dx$ の積分

次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int xe^{x^2+1}dx$

(2) $\displaystyle\int x^2e^{x^3}dx$

(3) $\displaystyle\int x^2(2x^3-1)^5dx$

(4) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-2}dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2-1)^3}dx$

(6) $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{4-3x^2}}dx$

(7) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos xdx$

(8) $\displaystyle\int \cos^4 x\sin xdx$

(9) $\displaystyle\int \cos^3 xdx$

(10) $\displaystyle\int \sin^3 xdx$

(11) $\displaystyle\int \frac{\log x}{x}dx$

(12) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$

$\boxed{7}$ $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}$ の積分

$\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)} = \log|f(x)| + C$ ... この積分は置換積分でもできるが計算はこの方法が楽である．

例

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2+1}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\log|x^2+1| + C \\ &= \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \tan x dx &= -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}dx \\ &= -\log|\cos x| + C\end{aligned}$$

分子を，分母の関数の微分した形としてみなす．その際に余分な値がでてきたときは，何かをかけて打ち消させる．

その後は，$\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \log|x| + C$ の公式を利用して積分する．

例題 13: 三角関数の積分（$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ の積分）

次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+1}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1-\cos x}dx$

(3) $\displaystyle\int \tan x dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{\tan x}dx$

(5) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$

(6) $\displaystyle\int \frac{1}{x\log x}dx$

(7) $\displaystyle\int \frac{1}{x}(\log x)^3 dx$

(8) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx$

(9) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+e^{-x}}dx$

実践問題 2: $\cos x$　$\sin x$　$\tan x$ の次数違い

次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int \cos x dx$

(2) $\displaystyle\int \cos^2 x dx$

(3) $\displaystyle\int \cos^3 x dx$

(4) $\displaystyle\int \cos^4 x dx$

(5) $\displaystyle\int \sin x dx$

(6) $\displaystyle\int \sin^2 x dx$

(7) $\displaystyle\int \sin^3 x dx$

(8) $\displaystyle\int \sin^4 x dx$

(9) $\displaystyle\int \tan x dx$

(10) $\displaystyle\int \tan^2 x dx$

(11) $\displaystyle\int \tan^3 x dx$

(12) $\displaystyle\int \tan^{-1} x dx$

■ここまで積分練習

実践問題 3: ここまでの定積分

次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x}dx$

(2) $\displaystyle\int_1^2 2^x dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\log 2} e^{3x} dx$

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta$

(5) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt$

(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x + \cos 3x)dx$

(7) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$

(8) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin^2 2x dx$

(9) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx$

(10) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin 4x \sin 6x dx$

(11) $\displaystyle\int_3^5 x(x-3)^2 dx$

(12) $\displaystyle\int_0^2 x(x^2+1)^3 dx$

(13) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2-2x}{x^3-3x^2+1}dx$

(14) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2e^x}{e^x+1}dx$

(15) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^3 x dx$

8 部分積分法

インテグラルと dx の間の関数が，2つの関数の積になっているときは，2つの関数をそれぞれに分けて積分することはできない．

注意！

$\displaystyle\int f(x)g(x)dx = \int f(x)dx \int g(x)dx$ のように積を分けることはできない．

前項でも述べた通り，「積分は積に弱く和に強い．変形は和の形にする」が基本方針なのだ．そこで，2つの関数の積になっている関数を和の形にする方法として「部分積分法」がある．いま，2つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積 $f(x)g(x)$ を，微分すると

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

両辺積分すると

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \int \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\}dx \\ &= \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx \end{aligned}$$

よって右辺の一方の項を左辺に移項させると，以下の部分積分の公式が導かれる．

部分積分の公式

$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ より次の (1)，(2) 式が導かれる．

$$\begin{aligned} &(1) \quad \int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx \\ &(2) \quad \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)'g(x)dx \end{aligned}$$

(1)，(2) 式は，$f(x)$ と $g(x)$ のどちらを微分した関数と見なすかの違いだけで変わりは無い．

重 要

部分積分の公式から以下の ■ の式が導かれる．入試問題の計算過程で頻出な式であり，その度に部分積分するのは大変なので暗記すべき．

■ $\displaystyle\int \log x dx = x\log x - x + C$

$$\begin{aligned} \int \log x dx &= \int 1 \cdot \log x dx \\ &= \int x' \log x dx \\ &= x\log x - \int x(\log x)' \\ &= x\log x - x + C \end{aligned}$$

注意！

$\displaystyle\int \log(ax+b)dx = \frac{1}{a}(ax+b)\log(ax+b) - (ax+b) + C$ にするミスが続出するので注意. 正しくは,

$$\int \log(ax+b)dx = \frac{1}{a}(ax+b)\log(ax+b) - x + C$$

例

$$\begin{aligned}\int x^2 \log x dx &= \int \left(\frac{1}{3}x^3\right)' \log x dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \log x - \int \frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 \log x - \frac{1}{9}x^3 + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \log(x-1)dx &= \int 1 \cdot \log(x-1)dx \\ &= \int (x-1)' \log(x-1)dx \\ &= (x-1)\log(x-1) - \int (x-1) \cdot \frac{1}{x-1}dx \\ &= (x-1)\log(x-1) - x + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int x\cos x dx &= \int x(\sin x)' dx \\ &= x\sin x - \int 1 \cdot \sin x dx \\ &= x\sin x + \cos x + C\end{aligned}$$

上の問題で，以下のような式変形をしてしまうとインテグラルの中がまだ 2 つの関数の積のままで積分できない．部分積分の目的はか 2 つの関数の積をそれぞれに分けて積分できる形に直すことであった.

$$\begin{aligned}\int x\cos x dx &= \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \cos x dx \\ &= \frac{x^2}{2}\cos x - \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\int \frac{x^2}{2}(-\sin x)dx}\end{aligned}$$

インテグラルの中がまだ 2 つの関数の積の形から直っていない.

例題 14: 部分積分

次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x\log x dx$

(2) $\displaystyle\int xe^{2x}dx$

(3) $\displaystyle\int x^2\log x dx$

(4) $\displaystyle\int \log(x+1)dx$

(5) $\displaystyle\int (\log x)^2 dx$

(6) $\displaystyle\int xe^{x}dx$

(7) $\displaystyle\int xe^{-x}dx$

(8) $\displaystyle\int x\cos 2x dx$

(9) $\displaystyle\int x\sin 3x dx$

(10) $\displaystyle\int \sqrt{x}\log x dx$

(11) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\log x dx$

(12) $\displaystyle\int x2^{x}dx$

２回以上部分積分バージョン

$$\int\{(n\text{ 次の多項式})\times e^x\}dx,\ \int\{(n\text{ 次の多項式})\times\sin x\}dx,\ \int\{(n\text{ 次の多項式})\times\cos x\}dx$$

の積分は，部分積分を n 回する．そうすることで多項式を n 回微分することになるので，（n 次の多項式）が（$n-1$ 次の多項式）となり，それを繰り返し行い，（２次の多項式) $\Rightarrow$ (１次の多項式) $\Rightarrow$(定数) になる．結局のところ

$$\int\{(\text{定数})\times e^x\}dx,\ \int\{(\text{定数})\times\sin x\}dx,\ \int\{(\text{定数})\times\cos x\}dx$$

になり計算ができるようにになる．さらに，

$$\int\{e^x\times\sin x\}dx,\ \int\{e^{-x}\times\cos x\}dx$$

などの形をした式の積分は与式を I と置いて部分積分を繰り返すことになる．これは入試頻出

注意！

$\int\{(\text{多項式‘何次式であっても’})\times\log x\}dx$ の積分は１回のみの部分積分で計算できる．

例

$$
\begin{aligned}
\int x^2 e^x dx &= \int x^2 (e^x)' dx \\
&= x^2 e^x - \int 2x e^x dx \qquad \text{（1回目に部分積分終了）} \\
&= x^2 e^x - 2\int x (e^x)' dx \qquad \text{（2回目の部分積分開始）} \\
&= (x^2 - 2x + 2)e^x + C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int x^2 \cos x dx &= \int x^2 (\sin x)' dx \\
&= x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx \qquad \text{（1回目に部分積分終了）} \\
&= x^2 \sin x + 2\int x\,(\cos x)' dx \qquad \text{（2回目の部分積分開始）} \\
&= x^2 \sin x + 2\{x \cos x - \int \cos x dx\} \\
&= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int e^x \sin x dx &= I \text{ とおく} \\
I &= \int e^x \sin x dx \\
&= \int e^x (-\cos x)' dx \\
&= -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \qquad \text{（1回目に部分積分終了）} \\
&= -e^x \cos x + \int e^x (\sin x)' dx \qquad \text{（2回目の部分積分開始）} \\
&= -e^x \cos x + e^x \sin x - \underline{\int e^x \sin x dx} \qquad \text{(波線部分は } I \text{ であり，左辺に移項する)} \\
2I &= e^x(\sin x - \cos x) + C \\
\therefore I &= \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C
\end{aligned}
$$

例題 15: 部分積分 (２回以上部分積分)

次の不定積分または定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x^2 \sin x dx$

(2) $\displaystyle\int (x^2+1)e^{2x} dx$

(3) $\displaystyle\int x(\log x)^2 dx$

(4) $\displaystyle\int (x^2-x)e^{-x} dx$

(5) $\displaystyle\int (4-x^2)e^{x} dx$

(6) $\displaystyle\int e^{-x} \sin x dx$

(7) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$

(8) $\displaystyle\int_1^{e} (\log x)^2 dx$

(9) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x} \cos x dx$

9 置換積分法

置換積分その１ $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$ **の積分**

$\int \sqrt{a^2-x^2}dx$ の積分

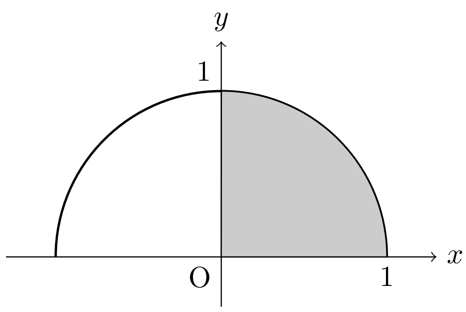
不定積分 $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$ を求める場合， $x=a\sin\theta$ もしくは $x=a\cos\theta$ とおいて置換積分する

定積分 $\int_c^b \sqrt{a^2-x^2}dx$ を求める場合，(置換積分するのはめんどうなので) 円の面積を利用する．

例

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}dx &= \int \sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\cos\theta d\theta \qquad (x=\sin\theta \text{とおく}) \\ &= \int \cos^2\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int(1+\cos 2\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left\{x+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right\}+C \\ &= \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2\theta + C\end{aligned}$$

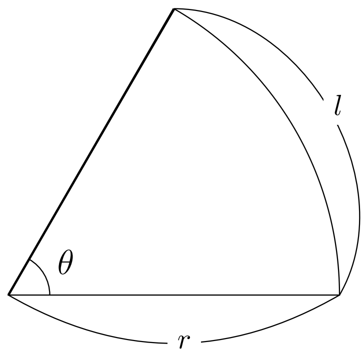
$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4} \qquad \text{（図より）}$$



◆◆補足◆◆ 【おうぎ形の面積公式】

弧の長さ $l=2\pi r\times\dfrac{\alpha^\circ}{360}$ なのでおうぎ形の面積 S として

$$\begin{aligned}S &= \pi r^2\times\frac{\alpha^\circ}{360} = \pi r^2\times\frac{l}{2\pi r} \\ &= \frac{1}{2}lr \quad \text{(半径と弧の長さでの面積)} \\ &= \frac{1}{2}(2\pi r\times\frac{\alpha^\circ}{360})r = \frac{1}{2}(2\pi r\times\frac{\theta}{2\pi})r \\ &= \frac{1}{2}r^2\theta \quad \text{(半径と中心角での面積)}\end{aligned}$$



例題 16: 置換積分法 ($\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$ の積分)

次の不定積分または定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}dx$

(2) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \sqrt{2 - x^2}dx$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^2 \sqrt{4 - x^2}dx$

(4) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9 - x^2}dx$

(5) $\displaystyle 4\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2 - x^2}dx$

(6) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{2 - x^2}dx$

(7) $\displaystyle\int_0^1 (1 + x)\sqrt{1 - x^2}dx$

(8) $\displaystyle\int_0^1 (2 + x)\sqrt{1 - x^2}dx$

(9) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^1 (2t + 1)\sqrt{1 - t^2}dt$

(10) $\displaystyle\int \sqrt{2x - x^2}dx$

(11) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{2x - x^2}dx$

(12) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{1}{4} - a}} \sqrt{1 - 4a - 4y^2}dy$

(11) 東京大 1997 年の積分計算のみ

置換積分その２これまでの型に当てはまらない積分

例えば, $x^2=t$ とおき, 両辺 x で微分することで $2xdx=dt$ となる．置き変えることで計算が楽になることがある．

このような積分方法を置換積分という. 置換積分は他の積分が上手くいかない，どう計算したら良いか検討がつかないときの最終手段の積分方法である.

式の形によって, どう置換するかはある程度決まっている．以下は代表的な例（暗記の必要はない）

- $\displaystyle\int\frac{1}{a^2+x^2}dx \Longrightarrow x=a\tan\theta$ とおく
- $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx \Longrightarrow x=a\sin\theta$　もしくは　$x=a\cos\theta$ とおく
- $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+x+1}dx \Longrightarrow$ 平方完成をしてから $x=a\sin\theta$　もしくは　$x=a\cos\theta$ とおく
- $\displaystyle\int\frac{1}{\sin x}dx \Longrightarrow \cos x=t$ とおく, $\displaystyle\int\frac{1}{\cos x}dx \Longrightarrow \sin x=t$ とおく（式変形からでも可）

ここまでは頻出な置換方法．他にも例えば以下のような置換もある．

- $\displaystyle\int\frac{1}{(x-1)\sqrt{x+1}}dx \Longrightarrow \sqrt{x+1}=t$ とおく
- $\displaystyle\int x^3\cos x^2dx \Longrightarrow x^2=t$ とおく

例

$\displaystyle\int\frac{x+1}{\sqrt{1-x}}dx$

$\sqrt{1-x}=t$ とおき，とおくと，$1-x=t^2$　ゆえに $x=1-t^2$ となり両辺 t で微分すると $\dfrac{dx}{dt}=-2t$

$$\begin{aligned}\int\frac{x+1}{\sqrt{1-x}}dx &= \int\frac{2-t^2}{t}\cdot(-2t)dt\\ &= 2\int(t^2-2)dt\\ &= 2\left(\frac{t^3}{3}-2t\right)+C\\ &= \frac{2}{3}t(t^2-6)+C\\ &= -\frac{2}{3}(x+5)\sqrt{1-x}+C\end{aligned}$$

$$\int \sin^2 x \tan x dx$$

【解法１】$\cos x = t$ とおき，両辺 x で微分すると $-\sin x = \dfrac{dt}{dx}$

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x \tan x dx &= \int (1-\cos^2 x)\frac{\sin x}{\cos x} dx \\
&= \int (1-t^2)\cdot\frac{-1}{t} dt \\
&= \int (t-\frac{1}{t}) dt \\
&= \frac{t^2}{2} - \log|t| + C \\
&= \frac{1}{2}\cos^2 x - \log|\cos x| + C
\end{aligned}$$

【解法２】$\tan x = t$ とおき，両辺 x で微分すると $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x \tan x dx &= \int \frac{t^2}{1+t^2}\cdot t\cdot\frac{dt}{1+t^2} \\
&= \int \frac{t^3}{(t^2+1)^2} dt \\
&= \int \frac{(t^2+1)-1}{(t^2+1)^2}\cdot\frac{2t}{t} dt \\
&= \frac{1}{2}\int\left\{\frac{2t}{t^2+1} - \frac{2t}{(t^2+1)^2}\right\} dt \\
&= \frac{1}{2}\left\{\log(t^2+1) + \frac{1}{t^2+1}\right\} + C \\
&= \frac{1}{2}\left(\log\frac{1}{\cos^2} + \cos^2 x\right) + C \\
&= \frac{1}{2}\cos^2 x - \log|\cos x| + C
\end{aligned}$$

$\displaystyle\int \frac{1}{\sin x - 1} dx$　　　$\tan\dfrac{x}{2} = t$ とおくと，$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$　　また，$dx = \dfrac{2}{1+t^2} dt$　　　$\cdots$(補足参照)

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin x - 1} dx &= \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} - 1}\cdot\frac{2}{1+t^2} dt \\
&= -\int \frac{2}{(t-1)^2} dt \\
&= \frac{2}{t-1} + C \\
&= \frac{2}{\tan\frac{x}{2} - 1} + C
\end{aligned}$$

◆◆◆補足◆◆◆

ワイエルシュトラス置換

$\tan\dfrac{x}{2} = t$ とおくと　$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$,　$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$,　$dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt$

〜上の式を導いてみよう〜

例題 17: 置換積分は最後の手段！

(1) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}dx$ を 3 通りの方法で求めよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1-\sin x}dx$ を 3 通りの方法で求めよ.

例題 18: 置換積分法 1

次の不定積分または定積分を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(1) $\displaystyle\int 2x^3 e^{x^2} dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x} dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{1}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x}} dx$

(4) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{4+x^2} dx$

(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(6) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-\sqrt{x}} dx$

(7) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x(1-2x)^n dx$

(8) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^5+2x^2}{(1+x^3)^3} dx$

(9) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{1+2x}}{1+x} dx$

例題 19: 置換積分法 2

次の不定積分または定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+1}dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x}dx$

(3) $\displaystyle\int \sin(\log x)dx$

(4) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx$

(5) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{3+x^2}dx$

(6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

(7) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x^3\cos x^2 dx$

(8) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}dx$

(9) $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{3-\sqrt{x}}}$

(10) $\displaystyle\int_e^{e^e} \frac{\log(\log x)}{x\log x}dx$

(11) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+3e^x+e^{2x}}dx$

(12) $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4}}dx$

10 絶対値の積分

例題 20: 絶対値の積分 1

次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}\pi} |\cos x|dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin x|dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} |\cos 2x|dx$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sqrt{3}\sin x - \cos x|dx$

(5) $\displaystyle\int_0^{1} |e^x - 2|dx$

(6) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} |\sin x|dx$

(7) $\displaystyle\int_0^{4} |\sqrt{x} - 1|dx$

(8) $\displaystyle\int_0^{\pi} |\sin x\cos x|dx$

(9) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x - 2\cos x|dx$

(10) $\displaystyle\int_0^{2\pi} |x\cos\frac{x}{3}|$

例題 21: 絶対値の積分 2

(1) 実数 t が $1 \leqq t \leqq e$ の範囲で動くとき，$S(t) = \displaystyle\int_0^1 |e^x - t|dx$ を求めよ.

(2) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に対して，$f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} |\sin t - \sin x|dt$ を求めよ.

11 ベータ関数の積分

ベータ関数

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

$\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$ 公式の一般形

$m=1,\ n=1$ のとき $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(\beta-x)dx = \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

$m=1,\ n=2$ のとき $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(\beta-x)^2dx = \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$

〜上の式を導いてみよう〜

例題 22: ベータ関数の積分

次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 x^2(x-1)^3dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^3 (x+1)^2(3-x)^2dx$　　(3) $\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^3(\beta-x)^2dx$

■ここまでの積分練習

実践問題 4: ランダム (Lv. 1)

次の不定積分または定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x\cos 3x dx$

(2) $\displaystyle\int \log(1-x)dx$

(3) $\displaystyle\int xe^{-2x}dx$

(4) $\displaystyle\int x^2\cos 2x dx$

(5) $\displaystyle\int (x+2)^2e^{-x}dx$

(6) $\displaystyle\int e^x\sin^2 x dx$

(7) $\displaystyle\int x^n\log x dx$

(8) $\displaystyle\int_0^1 (x+e^{x-1})^2dx$

(9) $\displaystyle\int_0^\pi x\cos^2 x dx$

実践問題 5: ランダム (Lv. ２)

次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x}+1}{x}dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos x + \sin 2x)dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x+1}}dx$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+3x+2}dx$

(5) $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)(x^2+x+1)^2dx$

(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$

(7) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\sin^2 x dx$

(8) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos^3 x dx$

(9) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\log(x^2+1)dx$

(10) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{12}{x^3-8}dx$

(11) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2+1}dx$

(12) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\cos x dx$

実践問題 6: ランダム (Lv. ３)

次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\cos^2\frac{x}{2}-1\right)dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\cos 3x dx$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1-\sin x}dx$

(5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin x\cos x}dx$

(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos x}dx$

(7) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}d\theta$

(8) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}dx$

(9) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+e^x}dx$