［問題］

実数 $\displaystyle\int_0^{2023}\frac{2}{x+e^x}dx$ の整数部分を求めよ．　（東工大 2023）

［解答］

すべての実数 x に対して，不等式　$1+x\leqq e^x$　を示す．

$f(x)=e^x-(x+1)$ とおくと　　$f'(x)=e^x-1$

$f'(x)=0$ とすると　　$x=0$

$f(x)$ の増減表は右のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗

よって，$f(x)$ は $x=0$ のとき最小値 0 をとる．

したがって，すべての実数 x に対して　$f(x)\geqq 0$

よって　　$1+x\leqq e^x$

$1+x\leqq e^x$ より $x\geqq 0$ において

$0\leqq 1+x\leqq e^x$

$0\leqq x\leqq e^x-1$　　$(\because x\geqq 0)$

$e^x\leqq e^x+x\leqq 2e^x-1$

$$\frac{1}{2e^x-1}\leqq\frac{1}{e^x+x}\leqq\frac{1}{e^x}$$

$$\frac{2}{2e^x-1}\leqq\frac{2}{e^x+x}\leqq\frac{2}{e^x}$$

$$\int_0^{2023}\frac{2}{e^x}dx=\Big[-2e^{-x}\Big]_0^{2023}=-2(e^{-2023}-1)=2\left(1-\frac{1}{e^{2023}}\right)<2$$

$\therefore\ \displaystyle\int_0^{2023}\frac{2}{e^x}dx<2$　…①

$$\int_0^{2023}\frac{2}{2e^x-1}dx=2\int_0^{2023}\frac{e^{-x}}{2-e^{-x}}dx=2\Big[\log|2-e^{-x}|\Big]_0^{2023}\quad\cdots\cdots(★)$$

$=2\log(2-e^{-2023})$

$=\log(2-e^{-2023})^2$

$=\log(4-4e^{-2023}+e^{-4046})$　　$(\because(＊))$

$>\log\left(4-4\cdot\dfrac{1}{4}+0\right)=\log 3>\log e=1$

$\therefore\ \displaystyle\int_0^{2023}\frac{2}{2e^x-1}dx>1$ …②

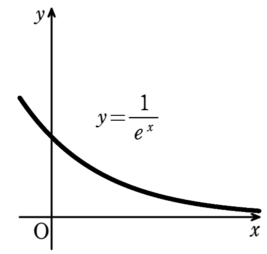
①，②より

$$1<\int_0^{2023}\frac{2}{x+e^x}dx<2$$

$\therefore$　整数部分　1　答

（＊）右図より

$\dfrac{1}{4}>e^{-2023}$，　$e^{-4046}>0$



［別解１］★まで同じ（評価を細かくする）

$$\int_0^{2023}\frac{2}{2e^x-1}dx=2\int_0^{2023}\frac{e^{-x}}{2-e^{-x}}dx=2\Big[\log|2-e^{-x}|\Big]_0^{2023}$$

$=2\log(2-e^{-2023})$

$=2\log\left(2-\dfrac{1}{e^{2023}}\right)$

$>2\log\left(2-\dfrac{1}{e^2}\right)=\log\left(2-\dfrac{1}{e^2}\right)^2$

$=\log(4-4e^{-2}+e^{-4})$

$>\log(4-4e^{-2})$

$>\log(4-4\cdot 2^{-2})$　　（$e>2$ より）

$=\log 3>\log e=1$

$\therefore\ \displaystyle\int_0^{2023}\frac{2}{2e^x-1}dx>1$ …②

$\fallingdotseq 2\log 2$
$=\log 4>\log e=1$
これを詳しく書いているだけ

$\dfrac{1}{e^2}$ ではなく
$\dfrac{1}{e}$ だとうまくいかない

［別解２］★まで同じ（面積と接線の利用）

$f(x)=\dfrac{2}{x+e^x}$　　$(x\geqq 0)$ とおく．

$f'(x)=\dfrac{-2(1+e^x)}{(x+e^x)^2}<0$

$f''(x)=\dfrac{2e^x}{(x+e^x)^3}\{e^x(e^x-x)+4e^x+2\}$

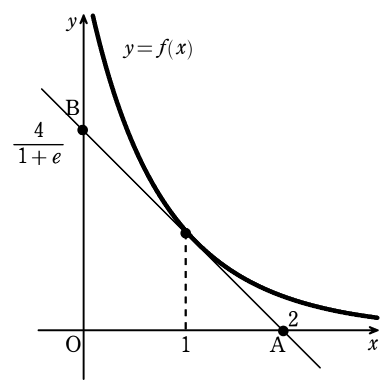
$\left(\begin{array}{l} e^x\geqq x+1 \text{ より } e^x>x \\ \qquad\qquad \therefore e^x-x>0\end{array}\right)$

よって，$f''(x)>0$ となり $y=f(x)$ は下に凸なグラフ

また，$y=f(x)$ の $x=1$ における接線は

$y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$y=\dfrac{-2}{1+e}x+\dfrac{4}{1+e}$



図より

$\triangle\mathrm{ABC}<\displaystyle\int_0^{2023}\frac{2}{x+e^x}dx$

$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\dfrac{4}{1+e}>\dfrac{4}{1+3}=1$

$\therefore\ \displaystyle\int_0^{2023}\frac{2}{2e^x-1}dx>1$ …②

$x=2$ における接線を考えると
面積が $\dfrac{1}{2}$ となりうまくいかない
$x=1$ における接線は東工大あるある